\*) Пусть траектория материальной точки задана как y = y(x).

Тогда радиус кривизны R траектории в точке M(x; y) равен:

R =

\*) Кинематика вращающихся систем отсчёта.

Пусть даны: неподвижная СО; СО, вращающаяся с постоянным вектором угловой скорости вокруг одной из своих осей («связанная со вращающимся телом»); материальная точка M.

Пусть - ускорение точки M в неподвижной СО, - ускорение вращающейся СО относительно неподвижной СО, - ускорение точки M во вращающейся СО, - радиус-вектор точки M во вращающейся СО,- скорость точки M во вращающейся СО.

Тогда: , где - **переносное ускорение**,

- **кориолисово ускорение.** Пусть - составляющая , перпендикулярная . Тогда , и .

- **центростремительное ускорение**.

1.) **Первый закон Ньютона:**

Существуют такие системы отсчёта, называемые инерциальными, относительно которых материальные точки, когда на них не действуют никакие силы (или действуют силы взаимно уравновешенные), находятся в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

**Второй закон Ньютона:**

В инерциальной системе отсчета произведение массы материальной точки на ее ускорение равно векторной сумме действующих на точку сил.

**Третий закон Ньютона:**

Материальные точки взаимодействуют друг с другом с силами, имеющими одинаковую природу, направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, равными по модулю и противоположными по направлению. Силы взаимодействия возникают лишь попарно.

**Замечание:**

Второй закон Ньютона теряет силу в двух случаях:

1.) Тела движутся со скоростями, близкими к скорости света.

2.) Тела очень малы и движутся в очень малой области пространства (например, электроны в атоме).

2.) **Масса** тела — это мера отклика тела на действие **силы**.

**Сила —** это мера действия на данное тело других тел.

Единица измерения **массы** в СИ: 1 **килограмм** == масса эталонного тела, представляющего собой цилиндр из сплава платины (90%) и иридия (10%), диаметра 39.17 мм и такой же высоты.

Единица измерения **силы** в СИ: 1 **Ньютон** == сила, вызывающая ускорение 1 м/с^2 у тела массой в 1 **килограмм**.

Чтобы измерить **массу** тела, подействуем на тело **эталонной силой**, измерим ускорение тела, найдём **массу** по формуле **m = F / a**.

Чтобы измерить **силу**, подействуем ею на тело **эталонной массы**, измерим ускорение тела, найдём **силу** по формуле **F = ma**.

**Замечание:** измерение массы нужно проводить при скоростях, много меньших скорости света.

3.) **Принцип относительности Галилея**:

Никакими механическими опытами, проведёнными внутри данной системы отсчёта, нельзя установить, находится ли данная система в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

**Математическая формулировка принципа относительности Галилея**:

Уравнения, выражающие законы механики, должны быть инвариантны относительно преобразований, описывающий переход от неподвижной системы отсчёта к системе отсчёта, движущейся прямолинейно и равномерно. (преобразований Галилея)

**Принцип относительности Эйнштейна**:

Никакими физическими опытами, проведёнными внутри данной системы отсчёта, нельзя установить, находится ли данная система в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

**Математическая формулировка принципа относительности Эйнштейна**:

Уравнения, выражающие физические законы, должны быть инвариантны относительно преобразований Лоренца.

**Принцип постоянства скорости света:**

Скорость света не зависит от того, по отношению к какой системе отсчета - покоящейся

или движущейся - она определяется.

**Преобразования:**



**Галилея: Лоренца:**

4.) **Преобразования Лоренца:** см. выше.

**Релятивистское уравнение движения:**

, где - релятивистский импульс частицы, - её скорость, m — её масса, - сумма внешних сил, действующих на точку.

5.) **Закон всемирного тяготения:**

Любые две частицы притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними:

В точности:

**Принцип суперпозиции:**

Каждая пара частиц взаимодействует независимо (как если бы других частиц не было).

6.) **Элементарная работа —** это скалярное произведение силы и бесконечно малого перемещения точки приложения этой силы:

**Работа** — это сумма элементарных работ:

Один **Джоуль** — работа, которую совершает сила в один Ньютон при перемещении точки приложения силы на один метр в направлении действия силы.

**Потенциальная сила —** сила, работа которой равна нулю при перемещении точки приложения силы по любому замкнутому контуру.

Примеры **потенциальных** сил: сила тяжести, сила упругости, сила Кулона.

Пример **непотенциальной** силы: сила трения.

**Элементарная потенциальная энергия** — это элементарная работа потенциальной силы, взятая со знаком «минус».

**Потенциальная энергия** — это сумма элементарных потенциальных энергий. ← не зависит от траектории.

7.) По отношению к данной механической системе все силы делятся на внутренние и внешние. **Внутренними силами** называются силы взаимодействия между телами системы, **внешними** – силы, действующие на тела системы со стороны тел, **не входящих** в данную систему. Примеры **внутренних** сил: сила тяготения, с которой тела системы действуют друг на друга; сила кулона в системе заряженных частиц. Примеры **внешних** сил: сила тяготения, действующая со стороны тела, не принадлежащего системе; сила нормального давления со стороны поверхности, на которой лежит твёрдое тело (система частиц — твёрдое тело).

8.) **Центр масс системы частиц** — это воображаемая точка, радиус-вектор которой определяется по формуле: , где суммирование ведётся по всем точкам системы, m — полная масса системы. **Закон движения центра масс:** центр масс системы частиц движется так, как двигалась бы материальная точка, масса которой равна массе системы, если бы к этой точке были приложены все внешние силы.

9.) **Закон сохранения импульса:** если сумма внешних сил, действующих на механическую систему, равна нулю, то импульс системы сохраняется. **Закон сохранения импульса относительно оси:** если существует ось, в проекции на которую сумма внешних сил, действующих на механическую систему, равна нулю, то в направлении этой оси импульс системы сохраняется. **Закон сохранения полной механической энергии:** если работа непотенциальных сил, действующих на механическую систему, равна нулю, то полная механическая энергия системы сохраняется. **Закон сохранения энергии в теории относительности:** если сумма внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то релятивистская энергия системы сохраняется: При том же условии **сохраняется релятивистский импульс** системы:

10.) **Момент импульса** материальной точки — это векторное произведение радиус-вектора материальной точки и её импульса.

**Момент импульса системы частиц** определяется как сумма моментов импульса отдельных частиц системы. **Момент силы** — это векторное произведение радиус-вектора точки приложения силы и вектора силы.

**Момент относительно оси** — это проекция вектора момента на эту ось.

**Теорема моментов для материальной точки:** скорость изменения момента импульса материальной точки равна сумме моментов действующих на неё сил.

**Теорема моментов для системы частиц:** скорость изменения момента импульса системы частиц равна сумме моментов внешних сил, действующих на систему:

**Закон сохранения момента импульса (для системы частиц):** если сумма моментов внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то момент импульса системы сохраняется.

**Закон сохранения момента импульса относительно оси:** если существует ось, относительно которой сумма моментов внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то относительно этой оси момент импульса системы сохраняется.

11.) Пусть выбрана неподвижная ось. Тогда **моментом инерции твёрдого тела относительно данной оси** называется величина , где суммирование ведётся по частицам тела, - масса частицы, - расстояние от частицы до оси. **Примеры:** Момент инерции цилиндра массы m и радиуса r относительно оси цилиндра: , момент инерции прямого тонкого стержня длины l и массы m относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через: a.) центр масс: б.) конец стержня:, момент инерции шара радиуса r и массы m относительно оси, проходящей через его центр:

**Теорема Гюйгенса-Штейнера:** момент инерции тела относительно произвольной неподвижной оси равен сумме момента инерции этого тела относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями:

12.) **Плоское движение твёрдого тела:** , где

13.) **Сила инерции** — это добавочная сила, действующая на материальную точку в неинерциальной системе отсчёта, и определяемая формулой:

**Силы инерции**:

где

**Примеры:** невесомость и перегрузка — соответственно, исчезновение и увеличение веса тела, вызванные ускорением системы отсчёта (действует переносная сила);

центрифуга — быстро вращающееся тело испытывает действие центробежной силы;

14.) **Связи в механике —** не вытекающие из уравнений движения ограничения на координаты, скорости, ускорения точек механической системы.

**Уравнения связей —** соотношения между координатами, скоростями, ускорениями точек системы, математически выражающие связи.

**Голономные связи —** связи, сводящиеся к ограничениям только на координаты тел.

(пример **не**голономной связи: качение шара без проскальзывания. Для скорости центра справедливо: , где - вектор, идущий из точки касания в центр шара. Это уравнение нельзя проинтегрировать по времени и получить ограничения на координаты, т. к. не гарантировано плоское движение).

**Стационарные связи** — связи, уравнения которых не содержат времени в явном виде.

(пример **не**стационарной связи — математический маятник с длиной нити, зависящей от времени).

**Примеры систем со связями:** математический маятник с длиной нити l.

Пусть начало отсчёта — в точке подвеса. Тогда ;

Точка, движущаяся по плоскости в пространстве: координата **z** точки связана с координатами **x** и **y** уравнением плоскости; Качение цилиндра без проскальзывания: перемещение центра цилиндра связано с углом поворота:

**Примеры систем без связей:** пружинный маятник (пружина — не связь!), свободно падающее тело.

**Силы** делятся на два **вида**:

1.) **Заданные** силы (F) — известные постоянные или известные функции координат (скоростей, ускорений) частиц. Примеры: сила тяжести, сила упругости.

2.) Силы **реакции (**R**)** — силы, действующие на тела системы со стороны тел, реализующих связи. Примеры: сила нормального давления, сила натяжения нити, сила трения

15.) **Число степеней свободы системы** (S) — это число независимых координат, полностью определяющих положение системы в пространстве.

**Примеры:** для системы, состоящей из **N** отдельных материальных точек , где k — число связей. Для твёрдого тела (достаточно рассмотреть каркас в виде треугольника) .

**Обобщённые координаты —** это любые S координат, полностью описывающих положение системы в пространстве. Обозначение:

**Свойства обобщённых координат:**

1. Радиус-векторы точек системы являются однозначными функциями набора обобщённых координат (быть может, ещё и времени, если в системе есть нестационарные связи).

2. Обобщённые координаты обращают в тождества уравнения связей.

16.) **Виртуальные перемещения** — это бесконечно малые перемещения, допускаемые связями в данный момент времени. Для точки с радиус-вектором :

Символ δ действует, как обычный дифференциал по отношению к обобщённым координатам, но не ко времени.

**Виртуальная работа** — это работа силы на виртуальном перемещении.

**Идеальные связи** — связи, для которых виртуальная работа сил реакции равна нулю:

**Примеры идеальных связей:** точка на идеально гладкой плоскости. Сила реакции — сила нормального давления — действует перпендикулярно плоскости, виртуальное перемещение лежит в плоскости, скалярное произведение равно нулю;

Качение без проскальзывания: рассмотрим точку тела, соприкасающуюся с плоскостью. Для этой точки виртуальное перемещение равно нулю, т. к. нет проскальзывания (связи не допускают её перемещения). Следовательно, виртуальная работа сил реакции равна нулю и скалярное произведение равно нулю.

Внутренние связи в абсолютно твёрдом теле, обеспечивающие постоянство расстояний между текущими положениями точек тела.

17.) **Лагранжианом механической системы** называется разность её кинетической и потенциальной энергий, выраженная через обобщённые координаты, обобщённые скорости и время.

**Уравнения Лагранжа** (записываются для механической системы, подчинённой идеальным голономным связям):

Если все заданные силы, действующие на механическую систему, **потенциальные**, то **уравнения Лагранжа** можно записать через **Лагранжиан:**

Символом обозначается полная производная по времени, символом - частная производная. может зависеть от времени в случае нестационарных связей.

18.) **Обобщённая сила** , отвечающая обобщённой координате , определяется как

Её размерность равна . Если размерность - **метр**, то размерность - **Ньютон**, и тогда обобщённая сила имеет смысл **проекции силы** на некоторую ось. Если - безразмерная величина (**угол**), то размерность - , и обобщённая сила имеет смысл **момента силы относительно** некоторой оси.

**Обобщённый импульс** , отвечающий обобщённой координате , определяется как

Размерность обобщённого импульса . Если соответствующая обобщённая координата имеет размерность **метр**, то обобщённый импульс имеет размерность и имеет смысл **проекции импульса** на некоторую ось. Если соответствующая обобщённая координата — **безразмерная**, то обобщённый импульс имеет размерность и имеет смысл **момента импульса относительно** некоторой оси.

19.) **Гамильтониан механической системы** определяется как, где L — **Лагранжиан** этой системы.

**Закон изменения Гамильтониана**:

Механическая система называется **консервативной**, если её **Гамильтониан** не зависит от времени явным образом .

**Гамильтониан консервативной системы** — это сумма кинетической и потенциальной энергий системы, выраженная через канонические переменные (обобщённые координаты и обобщённые импульсы):

**Уравнения Гамильтона**:

20.) **Уравнение гармонических колебаний:** , где **x** — отклонение обобщённой координаты колеблющегося тела относительно положения равновесия

**Общее решение** уравнения гармонических колебаний: , где φ = const — начальная фаза колебания, A = const — амплитуда колебаний.

Чтобы **найти частоту малых колебаний механической системы ω**, нужно записать уравнение движения системы, после чего привести его к стандартному виду уравнения гармонических колебаний: . В силу предположения о малости колебаний можно, например, полагать , если колеблющаяся величина — угол. Кроме того, можно разложить **потенциальную** энергию в ряд Тейлора **вблизи положения равновесия**, при этом первый член разложения можно отбросить, т. к. потенциальная энергия определяется с точностью до константы, второй член разложения обращается в ноль в положении **равновесия**. Потенциальная энергия будет приблизительно равна **третьему** члену разложения, зависящему от отклонения **квадратично**.

21.) **Примеры:**


плоский двойной маятник


плоский математический маятник с перемещаемой точкой подвеса

**Собственная частота** колебательной системы — это частота свободных колебаний системы.

**Нормальные колебания —** это гармонические колебания на одной из собственных частот системы.

**Нормальные координаты —** это обобщённые координаты, которые при любых движениях системы меняются независимо друг от друга.

Рассмотрим систему с **четвёртой** иллюстрации. В качестве обобщённых координат возьмём отклонения шариков от их положений равновесия. Записав уравнения движения, мы увидим, что эти величины меняются **не независимо**, следовательно, их колебания не будут свободными. Если теперь сложить и вычесть полученные уравнения движения, получим новую пару уравнений, в каждой из которых можно сделать замену, так, что полученные уравнения будут **независимы**. Новые величины и будут **нормальными координатами.**

Частоты их колебаний будут **собственными частотами** системы. Старые **обобщённые** координаты выражаются через **нормальные** координаты как их полусумма и полуразность. **Нормальными колебаниями** будут колебания старых координат на собственных частотах. Отталкиваясь от вида выражения **старых** координат через **нормальные**, потребуем сначала, чтобы первая из норм. коорд. равнялась тождественно нулю, тогда обе старые координаты будут колебаться, как вторая норм. координата — получим **нормальные** колебания на второй из собственных частот. Потребовав, чтобы другая норм. координата равнялась тождественно нулю, получим **нормальные** колебания на первой из собственных частот.

22.) **Волновое уравнение** (как получено на лекциях для волны в натянутой струне)**:**

, где , T — сила натяжения струны, ρ – линейная плотность струны.

**Уравнение звуковой волны в воздухе** (в прямой трубе)**:** , где (судя по выводу этого уравнения на лекциях) – скорость **малого участка воздуха** под действием волны, - скорость звуковой волны в воздухе.

23.) **Распределение плотности вероятности** для непрерывной случайной величины – это отношение вероятности попадания с.в. в малый интервал вблизи заданного значения к величине этого интервала, в пределе при стремлении величины интервала к нулю:

Размерность распределения плотности вероятности обратна размерности соответствующей случайной величины.

**Многомерное распределение плотности вероятности** для нескольких непрерывных случайных величин – это отношение вероятности попадания нескольких с.в. в малые интервалы вблизи заданных значений к произведению величин этих интервалов, в пределе при стремлении величин интервалов к нулю: Размерность многомерного распределения плотности вероятности обратна произведению размерностей соответствующих с.в.

**Условие нормировки:** интеграл (многомерного) распределения плотности вероятности по всем допустимым значениям случайной величины (случайных величин) равен единице.

**Понижение порядка распределения:**

**Для независимых с.в:**

**Правило вычисления средних:**

**Термодинамическое равновесие** – состояние, в котором система, предоставленная самой себе, может находиться сколь угодно долго.

**Основной закон статистической механики равновесных систем:** в состоянии термодинамического равновесия распределение плотности вероятности для различных состояний системы описывается формулой **Гиббса**.

**Распределение Гиббса:** , где z – совокупность **канонических** переменных (обобщённых координат и обобщённых импульсов) системы, H = K + П = H(q, p) – **Гамильтониан** системы, - постоянная **Больцмана**, T – абсолютная температура системы, , c – нормировочная постоянная (из условия нормировки).

**Температура** – то, что измеряется термометром. Единица измерения температуры – градус Цельсия , определяется как одна сотая интервала между температурой плавления льда и температурой кипения воды при нормальных условиях ().

24.) **Распределение Максвелла (распределение молекул по скоростям):**

**Распределение Больцмана (распределение частиц в потенциальном силовом поле):**

**Нормировочная постоянная для распределения Максвелла:**

25.) **Теорема о равнораспределении энергии по степеням свободы:** в состоянии термодинамического равновесия на каждую квадратичную степень свободы приходится в среднем одинаковая энергия, равная

**Квадратичная степень свободы** – это каноническая переменная, вклад которой в **Гамильтониан** пропорционален квадрату этой переменной.

Пусть z – совокупность канонических переменных, - квадратичная степень свободы, - совокупность всех остальных канонических переменных. Тогда это условие означает, что

В этих обозначениях формулировка **теоремы** означает, что .

26.) **Диффузия** – это проникновение одного вещества в другое. Вызывается тепловым движением.

**Закон диффузии:** плотность потока частиц пропорциональна градиенту их концентрации.

Мы рассматриваем случай, когда концентрация зависит только от одной координаты: . Тогда **закон диффузии** принимает следующий вид: , где

- число частиц, прошедших в направлении оси x через «проём» площади S за время , D — **коэффициент диффузии**.

Величина, стоящая в левой части равенства, называется плотностью потока частиц. **Физический смысл** коэффициента диффузии — скорость «расплывания» диффузионного пятна. Формально **коэффициент диффузии** определяется как коэффициент пропорциональности между плотностью потока частиц и градиентом их концентрации.

**Уравнение диффузии:**

**Теплопроводность** — это процесс переноса тепла в неоднородно нагретом теле.

**Закон теплопроводности:** плотность потока тепла пропорциональна градиенту температуры. Пусть температура зависит только от одной координаты: .

**Закон теплопроводности** принимает следующий вид: , где ϰ (каппа) — **коэффициент теплопроводности**, - количество тепла, прошедшего через «проём» площади S за время Δt. Величина, стоящая в левой части равенства, называется плотностью потока тепла. **Коэффициент теплопроводности ϰ** определяется как коэффициент пропорциональности между плотностью потока тепла и градиентом температуры.

.

**Теплота** — это энергия, переданная без совершения работы.

**Уравнение теплопроводности:** , где c — удельная теплоёмкость вещества, ρ — его плотность.

Из этих законов можно сделать два **вывода**: Тепло идёт в направлении убыли температуры; Поток частиц идёт в направлении убыли их концентрации.